

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

**A3. α.** Σωστό,    **β.** Σωστό,    **γ.** Σωστό,    **δ.** Λάθος,    **ε.** Λάθος.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** • η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$

•  $f(a) = 5\beta > 0$  και  $f(\beta) = 5a < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(a, \beta)$ .

**B2.** Είναι  $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{5}$ , άρα για να είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο

$M(\xi, f(\xi))$  κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon)$ , αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, \beta)$ , τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = -5$ .

**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ**

**1<sup>η</sup> Λύση**

• η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$

• η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, \beta)$ , τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{5\beta - 5a}{\beta - a} = \frac{-5(\beta - a)}{\beta - a} = -5$$

**2<sup>η</sup> Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$ , με  $h(x) = f(x) + 5x$ .

• η  $h$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ , ως άθροισμα συνεχών

• η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$ , με  $h'(x) = f'(x) + 5$

•  $h(a) = f(a) + 5a = 5a + 5\beta$

$h(\beta) = f(\beta) + 5\beta = 5a + 5\beta$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, \beta)$ , τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 5 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -5.$$

### B3. 1<sup>η</sup> λύση

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$
- $f(\beta) = 5a < \frac{5}{2}(a + \beta) < 5\beta = f(a)$ , διότι  $a < \frac{a + \beta}{2} < \beta$   
από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, \beta)$ ,  
τέτοιο ώστε  $f(\xi) = \frac{5}{2}(a + \beta)$ .

### 2<sup>η</sup> λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g$ , με  $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}(a + \beta)$

- η  $g$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$
- $g(a) = f(a) - \frac{5}{2}(a + \beta) = 5\beta - \frac{5}{2}(a + \beta) = \frac{5}{2}(\beta - a) > 0$

$$g(\beta) = f(\beta) - \frac{5}{2}(a + \beta) = 5a - \frac{5}{2}(a + \beta) = \frac{5}{2}(a - \beta) > 0$$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, \beta)$ , τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \frac{5}{2}(a + \beta) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{5}{2}(a + \beta).$$

### ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι  $z_2 = \overline{z_1}$ .

$$z_1 z_2 = \frac{y}{1} = y \quad \text{και} \quad z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 5^2 = 25, \text{ άρα } y = 25.$$

Γ2. Η εξίσωση γίνεται:  $z^2 - 6z + 25 = 0$

$$\Delta = -64 \quad \text{και} \quad z_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2} = 3 \pm 4i$$

και επειδή  $\operatorname{Im}(z_1) > 0$  θα είναι  $z_1 = 3 + 4i$  και  $z_2 = 3 - 4i$ .

$$\begin{aligned} |w - z_1| &= |w - z_2| \stackrel{w = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 3 - 4i| = |x + yi - 3 + 4i| \Leftrightarrow \\ \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} &= \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\cancel{(x - 3)^2} + (y - 4)^2 = \cancel{(x - 3)^2} + (y + 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 8y + 16 = y^2 + 8y + 16 \Leftrightarrow -16y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma 4. (z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8 = (3 + 4i - 2 - 3i)^8 + (3 - 4i - 4 + 5i)^8$$

$$= (1 + i)^8 + (-1 + i)^8$$

$$= [(1 + i)^2]^4 + [(-1 + i)^2]^4$$

$$= (2i)^4 + (-2i)^4 = 16 + 16 = 32$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Πρέπει και αρκεί  $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

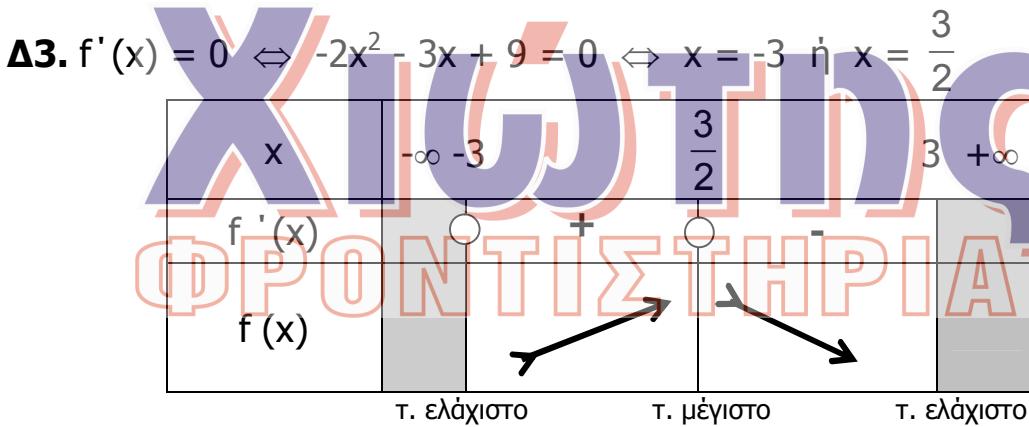
Άρα  $D_f = [-3, 3]$

**Δ2. a.** Για  $x \in (-3, 3)$  είναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+3)' \cdot \sqrt{9-x^2} + (x+3) \cdot \left(\sqrt{9-x^2}\right)' \\ &= \sqrt{9-x^2} + (x+3) \frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2} + (x+3) \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{-x(x+3)}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{-2x^2 - 3x + 9}{\sqrt{9-x^2}} \end{aligned}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{9-x^2} = 0$$

άρα  $f'(-3) = 0$ .



Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ , ενώ είναι γνησίως

φθίνουσα στο  $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$

**Δ4. τοπικό ελάχιστο :  $f(-3) = 0$**

$$\text{τοπικό μέγιστο : } f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + 3\right) \sqrt{9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

**τοπικό ελάχιστο :  $f(3) = 0$**